REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE CURVAS - I

1.- Representa gráficamente la función $f(x)=(x^2-x-1)\cdot e^x$

a)Dominio: f(x) es el producto de dos funciones continuas en todo R. Por tanto Dom f= R.

b) Asíntotas:

- A Verticales: f(x)=∞. $(x^2-x-1)\cdot e^x= \infty$; x=∞. No tiene
- A Horizontales: Como hay una función exponencial, debemos comprobar si hay dos dos ramas asintóticas horizontales diferentes:

$$y = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2-x-1)\cdot e^x = \infty\cdot e^{\infty} = \infty$$

$y = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2-x-1)\cdot e^x = \infty\cdot e^{-\infty} = \frac{\infty}{e^{\infty}} = 0$ por comparación de grados: $(x^2-x-1)<<e^x$. Por tanto hay una rama asintótica horizontal cuando x tiende a -∞ en **y=0.**

- A oblicua: y=mx+n, donde

$\boldsymbol{m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-x-1)\cdot e^x}{x} = \frac{\infty\cdot e^{\infty}}{\infty} = \infty$, por comparación de grados. No hay asíntota oblicua cuando x tiende a +∞.

Dado que f(x) tiene una parte exponencial, debemos ver si hay A oblicua cuando x tiende a - ∞. El límite para calcular la pendiente m sería ahora:

$\boldsymbol{m} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-x-1)\cdot e^x}{x} = \frac{0}{\infty} = 0$ Pues el numerador nos ha dado 0 al calcular la rama asintótica horizontal anterior. Así, tampoco habría rama asintótica oblicua en este caso.

c) Simetrías: Hacemos el cambio de signo a las dos definiciones de la función

$$f(-x) = ((-x)^2-(-x)-1)\cdot e^{-x} = (x^2+x-1)\cdot e^{-x} \neq \pm f(x)$$

f(x) es no simétrica.

d) Corte con ejes:

Vert: x=0 $f(0) = (0^2-0-1)\cdot e^0 = -1\cdot 1 = -1$ Corta a OY en **(0,-1)** **<u>Punto A</u>.**

Horizontal: y=0; f(x)=0: $(x^2-x-1)\cdot e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-1=0 \\ e^x=0 \end{cases}$

Para la primera ecuación, resolvemos la de 2º grado que se plantea y tenemos que: $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Por tanto, cortamos en dos puntos ocasiones al eje horizontal: $\boldsymbol{B}\left(\frac{\mathbf{1-\sqrt{5}}}{\mathbf{2}},\mathbf{0}\right)=(-\mathbf{0'61},\mathbf{0})$ y el punto $\boldsymbol{C}\left(\frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}},\mathbf{0}\right)=(\mathbf{1'62}\,,\mathbf{0})$

Para la 2ª, $e^{x}=0$ la única solución es x=-∞ $\notin R$.

e) Periodicidad. Esta función no es periódica.

f) Máximos y mínimos. Estudio de la 1ª derivada. Calculamos f'(x):

$$f'(x)=(2x-1)\cdot e^{x}+(x^{2}-x-1)\cdot e^{x}=\ (x^{2}+x-2)\cdot e^{x}$$

En los extremos relativos f'(x)=0. Igualamos a 0 la expresión anterior y tendremos:

$$(x^{2}+x-2)\cdot e^{x}=0\Rightarrow\begin{cases}x^{2}+x-2=0\\ \quad e^{x}=0\end{cases}$$

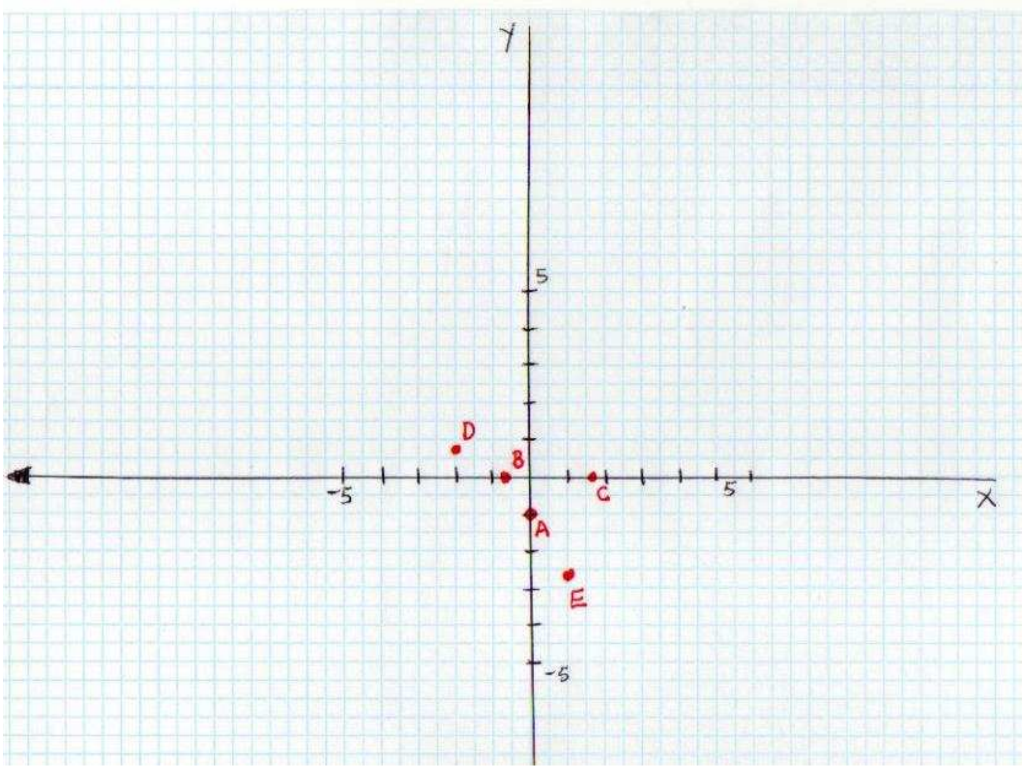
Como en el caso del corte con OX, resolvemos ambas ecuaciones y tendremos, para la primera x=-2 y x=1, mientras que para la 2ª tendremos nuevamente una solución no real en -∞.

Calculamos la ordenada de cada uno de los dos puntos anteriores:

$f(-2)=\left(4—(-2)-1\right)\cdot e^{-2}=\frac{5}{e^{2}}\Rightarrow\left(-2,\frac{5}{e^{2}}\right)=(-\mathbf{2},\mathbf{0'68})$ **Punto D**

$f(1)=(1-1-1)\cdot e^{1}=-e\Rightarrow(1,-e)=(\mathbf{1},-\mathbf{2'718})$**Punto E**

Pongamos sobre los ejes la información que ya tenemos:



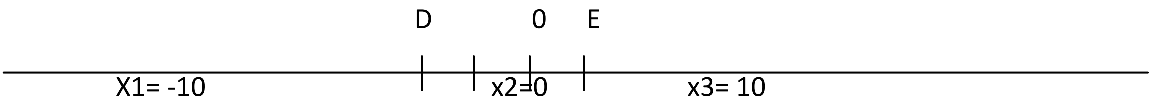
Teniendo en cuenta que f(x) es siempre continua y derivable, empezamos a ver ya qué forma podrá tener la curva una vez representada.

Estudiamos la monotonía para ver su crecimiento y decrecimiento:

g) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

Tendremos en cuenta: Dom f= R
Asíntotas verticales: No hay
Cambio de definición: No hay
Extremos relativos: Puntos $D = \left(-2, \frac{5}{e^2}\right)$ y E (1, -e)

La recta real queda dividida en tres intervalos, como en la figura. Tomamos un punto en cada uno de ellos para calcular el signo de la derivada:



$f'(x) = (x^2 + x - 2) \cdot e^x;$
$f'(-10) = (100 - 10 - 2) \cdot e^{-10} > 0$ $\nearrow$

$f'(0) = (-2) \cdot e^0 = -2 \cdot 1 = -2 < 0$ $\searrow$

$f'(10) = (100 + 10 - 2) \cdot e^{+10} > 0$ $\nearrow$

Por tanto, los intervalos de crecimiento serán:

f(x) es creciente en $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

f(x) es decreciente en (-2, 1)

El punto D será un máximo relativo y el punto E será un mínimo relativo

h) 2ª Derivada. Puntos de inflexión:

Hallamos en primer lugar la 2ª derivada.

$$f''(x) = (2x + 1) \cdot e^x + (x^2 + x - 2) \cdot e^x = (x^2 + 3x - 1) \cdot e^x$$

La igualamos a 0 para calcular los puntos de inflexión que presentará:

$$(x^2 + 3x - 1) \cdot e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 1 = 0 \\ e^x = 0 \end{cases}$$

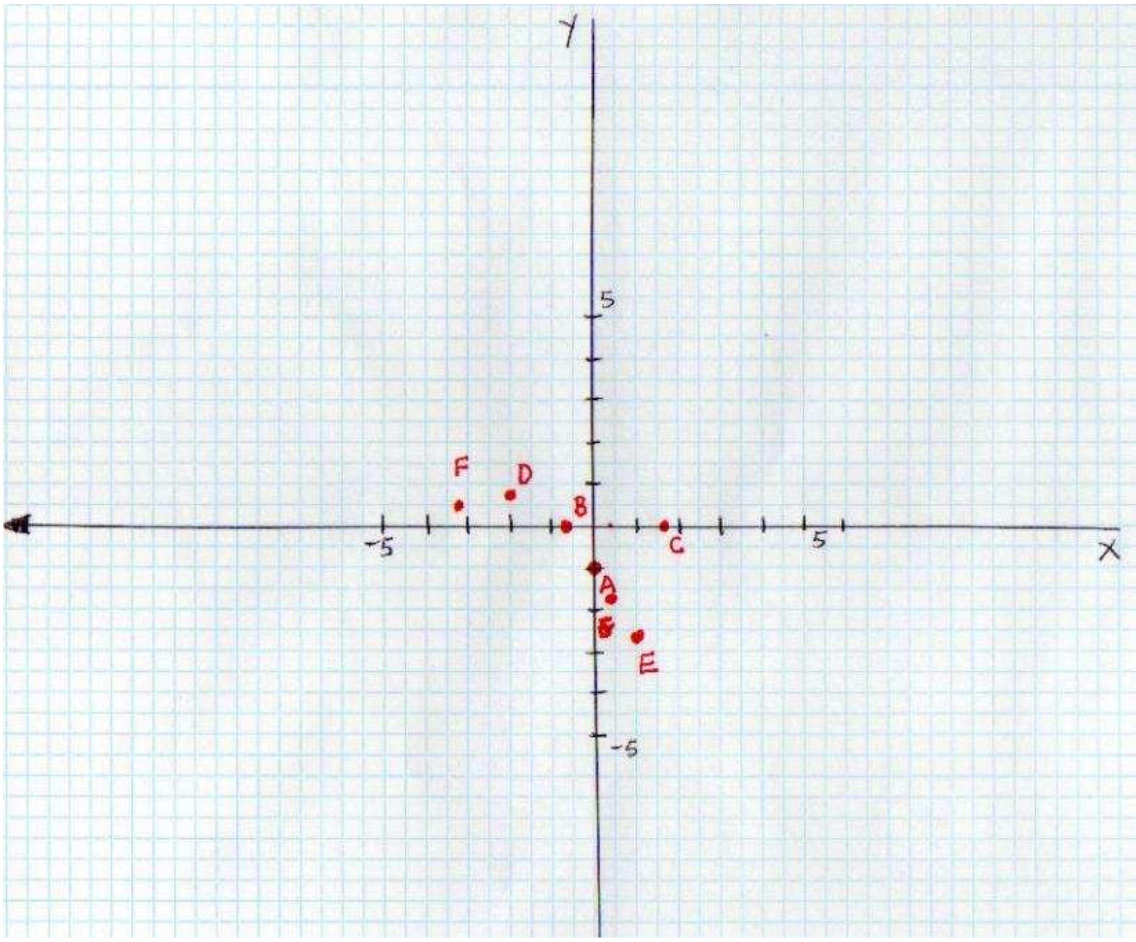
Como en el caso del corte con OX y la primera derivada, resolvemos ambas ecuaciones y tendremos, para la primera $x = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} = -3{,}30$ y $x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} = 0{,}30$, mientras que para la 2ª tendremos nuevamente una solución no real en -∞.

Calculamos la ordenada de cada uno de los dos puntos anteriores:

$f(-3{,}3) = \left((-3{,}3)^2 — (-3{,}3) - 1\right) \cdot e^{-3{,}3} = \frac{13{,}21}{e^{3{,}3}} \Rightarrow (-3'3, 0'49)$ **<u>Punto F</u>**

$f(0{,}3) = \left((0{,}3)^2 — (0{,}3) - 1\right) \cdot e^{0{,}3} = -1{,}21 \cdot e^{0{,}3} = -1{,}64 \Rightarrow (0'3, -1'64)$ **<u>Punto G</u>**

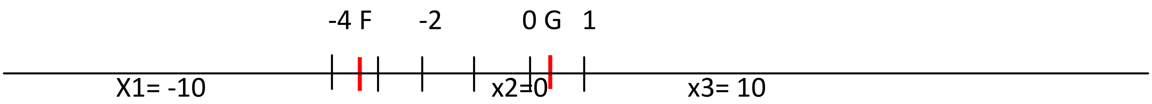
Si los pasamos nuevamente a nuestros ejes de coordenadas:



De izquierda a derecha tenemos F, D, B, A, G, E y C. La curva debe salir desde la asíntota horizontal en -∞ e ir pasando por todos esos puntos, dadp que es siempre continua, como dijimos al principio.

i) Intervalos de concavidad y convexidad:

Tendremos en cuenta: Dom f= R
Asíntotas verticales: No hay
Cambio de definición: No hay
Puntos de inflexión: Puntos F y G anteriores:



Nos sirven los mismos puntos de antes para estudiar el signo de la 2ª derivada:

$f''(x) = (x^2 + 3x - 1) \cdot e^x$;
$f''(-10) = (100 - 30 - 1) \cdot e^{-10} > 0$: Convexa

$f''(0) = (-1) \cdot e^0 = -1 \cdot 1 = -1 < 0$: Cóncava
$f'(10) = (100 + 30 - 1) \cdot e^{+10} > 0$: Convexa

f(x) es convexa en $(-\infty, -3'3) \cup (0'3, \infty)$: Como el punto E está en un intervalo convexo, se confirma que es un mínimo relativo (y absoluto en este caso, pues es el más bajo de la curva)

f(x) es cóncava en (-3,3, 0,3): Como D está en un intervalo cóncavo, se confirma que es un máximo relativo. (este no es absoluto, pues la función f(x) es creciente cuando x se aleja hacia + ∞. Concluyendo, la representación gráfica de esta curva es: